



## MODEL MANGSA PEMANGSA ANTARA *PHYTOPLANKTON* DAN *ZOOPLANKTON* DIMANA *PHYTOPLANKTON* BERADA DI LINGKUNGAN YANG BERACUN PADA EKOSISTEM LAUTAN

Fahrudin Muhtarulloh<sup>1</sup>, Fuad Nasir<sup>2</sup>, dan Herri Sulaiman<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Universitas Swadaya Gunung Jati (UGJ) Cirebon

email: herrimsc@gmail.com

### ABSTRAK

Penulisan artikel ini berawal dari permasalahan populasi *phytoplankton* terinfeksi yang hidup bersama dengan populasi *zooplankton* dalam suatu lingkungan yang beracun pada ekosistem lautan. Perbedaan artikel ini dengan penelitian yang sudah dilakukan yaitu objek penelitian yang dikaji adalah *phytoplankton* dan *zooplankton* yang memiliki karakteristik berbeda dengan mikroorganisme lain sehingga variabel dari model matematika yang dikonstruksi berbeda pula. Selain itu langkah-langkah pembuktian teorema dan lemma terkait solusi dari sistem model yang telah dibuat memiliki perbedaan dengan penelitian lain yang telah dilakukan. Tujuan dari artikel ini adalah mengetahui punah atau tidaknya masing-masing populasi tersebut dan hilang atau tidaknya konsentrasi racun dalam jangka waktu yang lama. Pada artikel ini, metode penelitian dimulai dari mengkonstruksi satu model, yaitu model mangsa pemangsa dengan *phytoplankton* terinfeksi di lingkungan yang beracun. Setelah itu mencari titik ekuilibrium dari model yang telah dibentuk, melakukan linearisasi pada model yang telah dibentuk, menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian untuk menganalisa sifat kestabilan lokal masing-masing titik ekuilibrium, menganalisa kestabilan global dari titik ekuilibrium yang dikaitkan dengan pembentukan fungsi Lyapunov dan Teorema *LaSalle* dan mengidentifikasi punah atau tidaknya masing-masing populasi dan hilang tidaknya konsentrasi racun pada organisme dan lingkungan. Rekomendasi dari artikel ini sebagai penambah wawasan keilmuan matematika khususnya bidang terapan dengan kajian matematika ekologi dan kelautan. Selain itu, artikel ini juga dijadikan sebagai dasar pertimbangan untuk menghasilkan suatu kebijakan bagi pihak yang berwenang untuk lebih memperhatikan ekosistem di lautan yang terkena racun baik yang dihasilkan dari limbah pabrik ataupun kapal laut.

**Kata Kunci:** Model Mangsa Pemangsa, *Phytoplankton* dan *Zooplankton*, Titik Ekuilibrium, Konsentrasi Racun, Punah, Eksis.

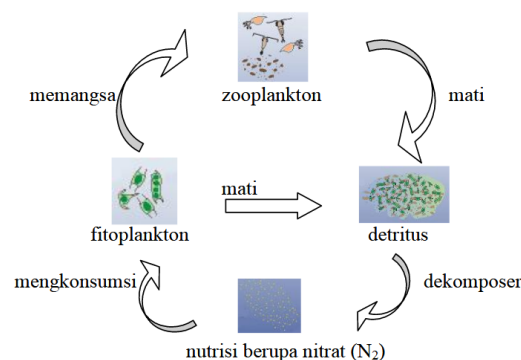
Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara citasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.

## PENDAHULUAN

Makhluk hidup bersel satu dari jenis *plankton* dapat diketahui bentuk kompetisinya dan dinamika model mangsa-pemangsa dari rantai makanan *phytoplankton* dan *zooplankton*. Suatu organisme hidup akan selalu membutuhkan organisme lain di lingkungan hidupnya, organisme yang memakan organisme lain dinamakan predator atau pemangsa (*zooplankton*), sedangkan yang dimakannya disebut mangsa (*phytoplankton*) (Sumarni, 2011). Salah satunya dapat diketahui melalui pertumbuhan dua mikroorganisme di suatu media pertumbuhan seperti media kemostat. Media kemostat merupakan suatu media pertumbuhan yang ditanam dua bakteri untuk berkompetisi mengonsumsi nutrisi yang sejenis (Sulaiman, 2017). Hubungan yang terjadi antara individu sangat kompleks dan bersifat saling mempengaruhi satu sama lain (timbal balik). Hubungan timbal balik antara unsur-unsur hayati membentuk sistem ekologi yang disebut ekosistem. Di dalam ekosistem terjadi rantai makanan, aliran energi dan siklus biogeokimia. Rantai makanan adalah pengalihan energi dalam sumbernya pada tumbuhan melalui sederetan organisme yang makan dan yang dimakan. Fungsi rantai makanan untuk menjaga jumlah makhluk hidup di dalamnya. Jangan sampai jumlah pemangsa lebih banyak daripada mangsanya karena akan mengakibatkan kepunahan makhluk hidup (Lorca & Hetchote, 1991).

Rantai makanan yang terjadi pada ekosistem laut berupa *phytoplankton* sebagai produsen primer dianggap sebagai tingkat trofik I, *zooplankton* pemakan *phytoplankton* sebagai tingkat trofik II, karnivor pemakan *zooplankton* sebagai tingkat trofik III, dan seterusnya. Proses pertumbuhan *phytoplankton* dipengaruhi oleh ketersediaan nutrisi, sedangkan *zooplankton* yang merupakan predator tingkat tinggi yang pertumbuhannya dipengaruhi oleh ketersediaan *phytoplankton*. Selanjutnya dari *phytoplankton* dan *zooplankton* akan terjadi kematian secara alami yang akan menjadi dekomposer (Dubey & Hussain, 1998). Dekomposer adalah pengurai jasad makhluk hidup yang telah mati (Sumarni, 2011). Dekomposer ini akan mengurai bangkai atau sisa-sisa makhluk hidup menjadi komponen yang lebih kecil lagi agar dapat digunakan kembali oleh *phytoplankton* sebagai sumber nutrisi untuk membuat makanan. Peranan dekomposer sangat penting di dalam menjaga keseimbangan rantai makanan di laut. Siklus rantai makanan ini dapat dilihat pada Gambar 1. Siklus ini dikenal sebagai siklus NPZD (*Nutrient, Phytoplankton, Zooplankton, Detritus*) seperti yang ada pada gambar di bawah ini.



**Gambar 1. Rantai Makanan *Phytoplankton* dan *Zooplankton***  
(Sumber: Sumarni, 2011)

Lingkungan yang berpolusi merupakan permasalahan yang sangat serius karena dapat mengancam kehidupan makhluk hidup di sekitarnya. Hal tersebut dapat dilihat dengan adanya perkembangan yang cukup cepat dari agrikultura dan industri modern, sejumlah racun mengontaminasi suatu ekosistem yang satu dan yang lainnya. Hal yang sangat penting untuk dipertanyakan adalah musnah atau tidaknya suatu populasi pada lingkungan yang berpolusi.

Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara citasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.

Oleh karena itu cara penentuan nilai *threshold* untuk mengetahui punah tidaknya suatu populasi dari interaksi dua spesies atau lebih sehubungan dengan racun pada lingkungan yang berpolusi perlu dipelajari (Purisha, 2011). Dampak dari racun adalah menurunkan laju pertumbuhan suatu spesies. Oleh karena itu, sangatlah penting bagi para peneliti untuk mempelajari dampak racun pada populasi dan punah tidaknya suatu populasi dengan suatu nilai *threshold*. Suatu spesies tidak akan bertahan hidup sendiri di alam. Spesies tersebut perlu berinteraksi dengan spesies yang lain untuk dapat bertahan hidup. Pada suatu ekologi terdapat interaksi biologi yaitu interaksi dua spesies atau lebih pada ekosistem.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan hasil pengembangan dari beberapa penelitian yang berhubungan dengan pemodelan suatu populasi pada lingkungan yang beracun. Pada penulisan artikel ini juga dibahas mengenai penyebaran penyakit pada suatu populasi. Model dinamik suatu populasi dengan adanya penyebaran penyakit dibahas oleh Mena-Lorca dan Hetchote (1991). Dalam penelitian tersebut dibahas mengenai punah tidaknya populasi tersebut dan terjadi penyebaran penyakit atau tidak. Beberapa penelitian tersebut dikembangkan menjadi pemodelan mangsa pemangsa dengan populasi mangsa yang terinfeksi di lingkungan yang berpolusi. Teori-teori yang digunakan pada penelitian ini meliputi kestabilan lokal dan global dari titik ekuilibrium, linearisasi dan penentuan batas-batas dari solusi. Selanjutnya rangkaian penelitian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membentuk model mangsa pemangsa dengan mangsa yang terinfeksi di lingkungan yang beracun. Dalam hal ini *phytoplankton* sebagai mangsa dan *zooplankton* sebagai pemangsa.
2. Mencari titik ekuilibrium dari model yang telah dibentuk.
3. Melakukan linearisasi pada model yang telah dibentuk.
4. Menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian untuk menganalisa sifat kestabilan lokal masing-masing titik ekuilibrium.
5. Menganalisa kestabilan global dari titik ekuilibrium yang dikaitkan dengan pembentukan fungsi Lyapunov dan Teorema LaSalle.
6. Mengidentifikasi punah atau tidaknya masing-masing populasi dan hilang tidaknya konsentrasi racun pada organisme dan lingkungan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai sistem mangsa pemangsa antara *phytoplankton* dan *zooplankton* yang mana *phytoplankton* terkena penyakit tidak fatal, namun terdapat konsentrasi racun pada lingkungan populasinya. Populasi *phytoplankton* dapat menyerap racun dari lingkungan karena terjadi laju kontak antara keduanya. Populasi yang berada di dalam ekosistem juga tidak padat. Jumlah populasi *phytoplankton* yang rentan ditulis dengan  $x_1(t)$ , jumlah populasi *phytoplankton* yang terinfeksi ditulis dengan  $x_2(t)$  dan jumlah populasi *zooplankton* ditulis dengan  $y(t)$ . Kemudian diasumsikan bahwa laju rekrutmen populasi *phytoplankton* yang rentan bernilai konstan dan dinyatakan dengan  $\theta$ . Pada kedua populasi *phytoplankton* tersebut dapat terjadi kontak dengan laju sebesar  $\beta$  yang menyebabkan terjadinya penularan penyakit dari populasi *phytoplankton* terinfeksi ke populasi *phytoplankton* rentan. Jenis penyakit yang menyerang populasi *phytoplankton* tersebut dapat menyebabkan kematian dengan laju sebesar  $h$ . Pada sistem, terdapat populasi *zooplankton* yang dapat memangsa populasi *phytoplankton* yang rentan maupun yang terinfeksi. Populasi *phytoplankton* yang terinfeksi tidak akan menyebabkan kematian bagi populasi *zooplankton* sehingga penurunan populasi *zooplankton* hanya bergantung pada kematian alami dengan laju sebesar  $d_3$ . Pemangsaan yang dilakukan oleh populasi *zooplankton* terhadap populasi *phytoplankton* menyebabkan pertumbuhan populasi *zooplankton* semakin tinggi. Pemangsaan oleh

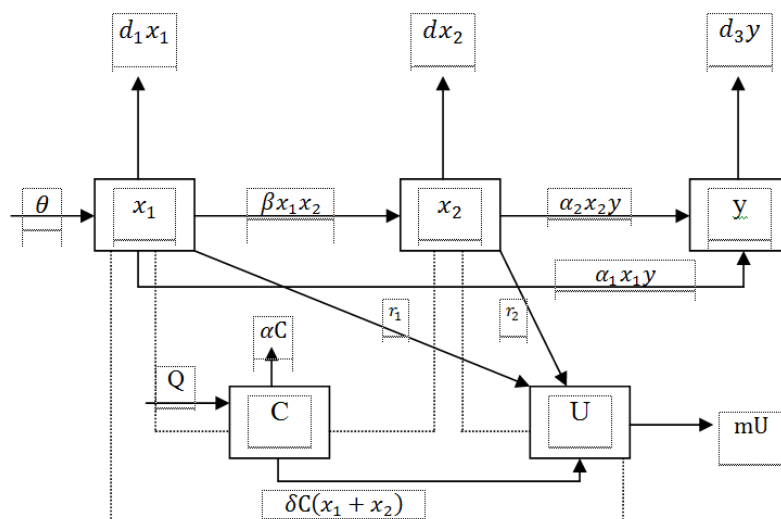
Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara citasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.

populasi *zooplankton* menyebabkan penurunan populasi *phytoplankton* yang rentan dan terinfeksi dengan laju berturut-turut sebesar  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$ . Penurunan pada populasi *phytoplankton* yang rentan juga dikarenakan kematian alami dengan laju sebesar  $d_1$ . Kematian alami tersebut merupakan kematian yang bukan karena penyakit. Pada populasi *phytoplankton* yang terinfeksi, selain penurunan karena pemangsaan dan penyakit, kematian alami juga menyebabkan penurunan dengan laju sebesar  $d_2$ . Jumlah laju kematian alami dan laju kematian karena penyakit pada populasi *phytoplankton* yang terinfeksi dinyatakan dengan  $d(d = d_2 + h)$ . Semua parameter bernilai positif. Konsentrasi racun pada populasi *phytoplankton* yang rentan dan terinfeksi dinyatakan dengan  $U(t)$ . Selain konsentrasi racun pada populasi *phytoplankton* tersebut, terdapat juga konsentrasi racun pada lingkungan yang dinyatakan dengan  $C(t)$ . Adanya racun tersebut menyebabkan penurunan jumlah populasi *phytoplankton* yang rentan dan terinfeksi dengan laju berturut-turut sebesar  $r_1$  dan  $r_2$ . Adanya konsentrasi racun tidak menyebabkan penurunan jumlah populasi *zooplankton*.

Kenaikan atau pemasukan konsentrasi racun pada lingkungan bernilai konstan yaitu dengan laju sebesar  $Q$ . Penurunan konsentrasi racun pada lingkungan diserap oleh populasi *phytoplankton* dengan laju sebesar  $\delta$  dan konsentrasi racun pada lingkungan yang hilang secara alami dengan laju sebesar  $\alpha$ . Konsentrasi racun yang hilang secara alami adalah hilangnya konsentrasi racun yang bukan karena diserap oleh populasi *phytoplankton*. Konsentrasi racun pada lingkungan yang diserap oleh populasi *phytoplankton* menyebabkan konsentrasi racun pada populasi *phytoplankton* meningkat. Laju hilangnya racun secara alami ditulis dengan  $m$ , menyebabkan penurunan konsentrasi racun pada populasi *phytoplankton* rentan maupun terinfeksi. Hilangnya racun secara alami pada populasi *phytoplankton* maupun terinfeksi disebabkan adanya sistem kekebalan tubuh masing-masing organisme pada populasi yang dapat menghilangkan atau menetralkan racun.

Untuk mempermudah dalam membentuk model dari sistem dengan asumsi-asumsi tersebut, berikut ini diberikan diagram transfer dari sistem permasalahan tersebut.



**Gambar 2. Diagram Transfer dari Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di lingkungan yang Beracun**

Dari Gambar 2 terlihat diagram transfer dari model mangsa pemangsa antara *phytoplankton* dan *zooplankton* dimana *phytoplankton* berada di lingkungan yang beracun. Pada awalnya terdapat populasi *phytoplankton* yang rentan ( $x_1$ ) dan terinfeksi ( $x_2$ ). Konsentrasi racun pada lingkungan ( $U$ ) akan mengenai *phytoplankton* yang rentan dan terinfeksi dengan kenaikan laju sebesar ( $Q$ ).

Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara citasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.

Namun konsentrasi racun ini tidak akan menyebabkan kematian bagi populasi *zooplankton* sehingga penurunan populasi *zooplankton* hanya bergantung pada kematian alami dengan laju sebesar  $d_3$ . Selain itu konsentrasi racun di lingkungan ekosistem lautan juga mengancam kelestarian *phytoplankton* sebesar ( $C$ ).

Berdasarkan asumsi-asumsi dan diagram transfer yang telah dibentuk, didapat model matematika sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \theta - \beta x_1 x_2 - \alpha_1 x_1 y - r_1 U x_1 - d_1 x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 x_2 - \alpha_2 x_2 y - r_2 U x_2 - d x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_1 x_1 y + \alpha_2 x_2 y - d_3 y, \\ \frac{dC}{dt} &= Q - \alpha C - \delta C(x_1 + x_2), \\ \frac{dU}{dt} &= \delta C(x_1 + x_2) - mU\end{aligned}\quad (1)$$

Diberikan kondisi awal sebagai berikut :

$$\begin{aligned}x_1(0) &= x_{10} > 0, \\ x_2(0) &= x_{20} > 0, \\ y(0) &= y_0 > 0, \\ U(0) &= U_0 > 0, \\ C(0) &= C_0 > 0.\end{aligned}$$

Dari penjelasan di atas, telah diketahui hasil penelitian yaitu diagram transfer dan model matematika mangsa pemangsa antara *phytoplankton* dan *zooplankton* dimana *phytoplankton* berada di lingkungan yang beracun. Lebih lanjut dari model yang telah dibuat akan dianalisis dan dibahas solusi pembuktian yang akan dijabarkan dalam bentuk teorema dan lemma. Berikut ini diberikan lemma yang membahas bahwa saat  $t$  menuju tak hingga, solusi sistem (1) akan berada di dalam  $R_+^5$ , dengan  $R_+^5 = \{x_1, x_2, y, C, U | x_1, x_2, y, C, U \geq 0\}$ .

### Lemma 1 (Luenberger, 1979)

Pada saat  $t \rightarrow \infty$ , semua solusi dari sistem (1) akan berada pada :

$$B_2 = \{x_1, x_2, y, C, U \in R_+^5 | 0 \leq x_1 + x_2 + y \leq M_1, m_3 \leq C \leq M_2, m_4 \leq U \leq M_3, x_1 \geq m_1, x_1 + x_2 \geq m_2\},$$

dengan :

$$m_1 = \frac{\theta}{\eta_1}, m_2 = \frac{\theta}{3\eta_2}, m_3 = \frac{Q\theta_1}{2\delta\theta + \alpha\theta_1}, m_4 = \frac{C_{min}\delta\theta}{3}, M_1 = \frac{\theta}{\theta_1}, M_2 = \frac{Q}{\alpha}, M_3 = \frac{\delta M_1 M_2}{m}.$$

### Bukti :

Diambil  $W(t) = x_1(t) + x_2(t) + y(t)$ . Kemudian dari Sistem, (1) didapat :

$$\dot{W}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \dot{y}(t) = \theta - r_1 U x_1 - d_1 x_1 - r_2 U x_2 - d x_2 - d_3 y \leq \theta - d_1 x_1 - d x_2 - d_3 y.$$

$$\text{Jadi : } \dot{W}(t) \leq \theta - d_1 x_1 - d x_2 - d_3 y. \quad (2)$$

Jika  $\theta_1 = \min\{d_1, d_2, d_3\}$ , maka pertidaksamaan (2) menjadi :

$$\dot{W}(t) \leq \theta - \theta_1(x_1(t) + x_2(t) + y(t)) = \theta - \theta_1 W(t).$$

Selanjutnya diberikan  $u(t)$  sebagai solusi dari persamaan diferensial berikut:

$\dot{u}(t) = g(t) = \theta - \theta_1 u(t)$ ,  $u(0) = u_0$  sehingga didapat  $u(t) = \frac{\theta}{\theta_1} + ce^{-\theta_1 t}$ . Fungsi  $g$  kontinu dan memenuhi kondisi Lipschitz secara lokal. Maka berlaku  $W(t) \leq \frac{\theta}{\theta_1} + ce^{-t}$ ,  $\forall t > 0$ .

Untuk  $t \rightarrow \infty$  didapat :  $\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \leq \frac{\theta}{\theta_1}$ , dengan:

$W(0) = x_{10} + x_{20} + y_0, \forall (x_{10}, x_{20}, y_0) \in R_+^3$  atau  $x_1(t) + x_2(t) + y(t) \leq \frac{\theta}{\theta_1}$ . Untuk penjabaran  $C, U, x_1, x_2, y$  dan  $x_1 + x_2$  analog seperti penjabaran pada fungsi  $W$ . Dari persamaan (1) didapat  $\frac{dC}{dt} = Q - \alpha C - \delta C(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} \leq Q - \alpha C$ , sehingga untuk  $t \rightarrow \infty$  didapat:  $\limsup_{t \rightarrow \infty} C(t) \leq \frac{Q}{\alpha}$  dengan  $C_\alpha = \limsup_{t \rightarrow \infty} C(t)$ . Diperhatikan persamaan (1)  $\frac{dU}{dt} = \delta C(x_1 + x_2) - mU \leq \delta C(x_1 + x_2 + y) - mU$ . Sehingga menjadi  $\frac{dU}{dt} \leq \frac{\delta \theta Q}{\theta_1 \alpha} - mU$ . Sehingga untuk  $t \rightarrow \infty$  didapat:  $\limsup_{t \rightarrow \infty} U \leq \frac{\delta \theta Q}{m \theta_1 \alpha}$  atau  $U_\alpha \leq \frac{\delta \theta Q}{m \theta_1 \alpha}$  dengan  $U_\alpha = \limsup_{t \rightarrow \infty} U(t)$ . Dari persamaan (1) didapat  $\eta_1 = \frac{\beta \theta}{\theta_1} + \frac{\alpha_1 \theta}{\theta_1} + r_1 \frac{\delta \theta Q}{m \theta_1 \alpha} + d_1$  maka untuk  $t \rightarrow \infty$  didapat:  $\liminf_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \geq \frac{\theta}{\eta_1}$  atau  $x_{1b} \geq \frac{\theta}{\eta_1}$  dengan  $x_{1b} = \liminf_{t \rightarrow \infty} x_1(t)$ . Dengan cara analog untuk  $t \rightarrow \infty$  didapat:  $y_\alpha = \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ,  $(x_1 + x_2)_b = \liminf_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) + x_2(t))$ ,  $C_b = \liminf_{t \rightarrow \infty} C(t)$  dan  $U_b = \liminf_{t \rightarrow \infty} U(t)$ . Jadi terbukti bahwa pada saat  $t \rightarrow \infty$ , semua solusi dari sistem (1) akan berada pada:

$B_2 = \{x_1, x_2, y, C, U \in R_+^5 | 0 \leq x_1 + x_2 + y \leq M_1, m_3 \leq C \leq M_2, m_4 \leq U \leq M_3, x_1 \geq m_1, x_1 + x_2 \geq m_2\}$ . ■

Berikut akan dicari titik-titik ekuilibrium sistem (1). Titik-titik ekuilibrium memenuhi persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \theta - \beta x_1 x_2 - \alpha_1 x_1 y - r_1 U x_1 - d_1 x_1 &= 0, \\ \beta x_1 x_2 - \alpha_2 x_2 y - r_2 U x_2 - d_2 x_2 &= 0, \\ \alpha_1 x_1 y + \alpha_2 x_2 y - d_3 y &= 0, \\ Q - \alpha C - \delta C(x_1 + x_2) &= 0, \\ \delta C(x_1 + x_2) - mU &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Dari persamaan (2) didapat  $x_2 = 0$  atau  $\beta x_1 - \alpha_2 y - r_2 U - d_2 = 0$ . Dari persamaan (2) juga didapat  $y = 0$  atau  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - d_3 = 0$ .

1. Jika  $x_2 = 0$  dan  $y \neq 0$  maka didapat titik ekuilibrium  $\overline{E}_1 \left( \frac{d_3}{\alpha_1}, 0, \frac{\theta}{d_3} - \frac{r_1 \delta Q d_3}{\alpha_1 m (\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} - \frac{d_1}{\alpha_1}, \frac{Q \alpha_1}{\alpha \alpha_1 - \delta d_3}, \frac{\delta Q d_3}{m (\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} \right)$ .
2. Jika  $x_2 = 0$  dan  $y = 0$  maka didapat titik ekuilibrium  $\overline{E}_2 \left( \frac{\theta}{r_1 \overline{U} + d_1}, 0, 0, \frac{Q - m \overline{U}}{\alpha}, \overline{U} \right)$  dengan  $\overline{U} = \frac{-\left(\frac{d_1 + \theta \delta}{r_1}\right) + \sqrt{\left(\frac{d_1 + \theta \delta}{r_1}\right)^2 + 4 \frac{\theta \delta Q}{r_1}}}{2}$ .
3. Jika  $y = 0$  dan  $x_2 \neq 0$  maka didapat titik ekuilibrium  $\overline{E}_3 \left( \frac{r_2 \overline{U} + d}{\beta}, \overline{x}_2, 0, \frac{Q - m \overline{U}}{\alpha}, \overline{U} \right)$ .

4. Jika  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - d_3 = 0$  maka didapat titik ekuilibrium  $\bar{E}_4 \left( \frac{d_3 - \alpha_2 \hat{x}_2}{\alpha_1}, \hat{x}_2, \frac{\beta \hat{x}_1}{\alpha_2} - \frac{r_2 \bar{U}}{\alpha_2} - \frac{d}{\alpha_2}, \frac{\bar{Q}}{\alpha + \delta(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)}, \bar{U} \right)$  dengan
- $$\bar{U} = \frac{\frac{(k_1 l_1 - k_2 l_3 - k_3 l_4 + k_4 l_2)}{(k_2 l_2 - k_3 l_1)} + \sqrt{\frac{(k_1 l_1 - k_2 l_3 - k_3 l_4 + k_4 l_2)^2}{(k_2 l_2 - k_3 l_1)^2} - 4 \frac{(k_1 l_4 - k_4 l_3)}{(k_2 l_2 - k_3 l_1)}}}{2} \text{ dan}$$
- $$\hat{x}_2 = \frac{l_4 - l_1 \bar{U}}{l_2 \bar{U} + l_3}.$$

Dimisalkan:

$$\tilde{x}_1 = \frac{d_3}{\alpha_1}, \quad \tilde{y} = \frac{\theta}{d_3} - \frac{r_1 \delta Q d_3}{\alpha_1 m(\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} - \frac{d_1}{\alpha_1}, \quad \tilde{A} = \frac{\theta}{\tilde{x}_1} + \alpha + \delta \tilde{x}_1 + m, \quad \tilde{B} = \frac{\theta}{\tilde{x}_1} (\alpha + \delta \tilde{x}_1) + r_1 \delta \tilde{x}_1 C + m \left( \frac{\theta}{\tilde{x}_1} + \alpha + \delta \tilde{x}_1 \right) + \alpha_1^2 \tilde{x}_1 \tilde{y}, \quad \tilde{C} = (\alpha + \delta \tilde{x}_1)(\alpha_1^2 \tilde{x}_1 \tilde{y} + \delta C r_1 \tilde{x}_1) - \delta^2 r_1 \tilde{x}_1^2 C + m \alpha_1^2 \tilde{x}_1 \tilde{y}, \quad \tilde{D} = m(\alpha + \delta \tilde{x}_1) \alpha_1^2 \tilde{x}_1 \tilde{y}.$$

**Teorema 2 :**

Jika  $\beta \tilde{x}_1 < \alpha_2 \tilde{y} + r_1 U + d$ ,  $\tilde{A} > 0$ ,  $\begin{vmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} \\ 1 & \tilde{B} \end{vmatrix} > 0$  dan  $\begin{vmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} & 0 \\ 1 & \tilde{B} & \tilde{D} \\ 0 & \tilde{A} & \tilde{C} \end{vmatrix} > 0$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{E}_1 \left( \frac{d_3}{\alpha_1}, 0, \frac{\theta}{d_3} - \frac{r_1 \delta Q d_3}{\alpha_1 m(\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} - \frac{d_1}{\alpha_1}, \frac{Q \alpha_1}{\alpha \alpha_1 - \delta d_3}, \frac{\delta Q d_3}{m(\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} \right)$  stabil asimtotik lokal.

**Teorema 3 :**

Jika  $\beta \bar{x}_1 < r_1 \bar{U} + d$ ,  $\alpha_1 \bar{x}_1 < d_3$ ,  $\bar{A} > 0$  dan  $\begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ 1 & \bar{B} \end{vmatrix} > 0$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{E}_2 \left( \frac{\theta}{r_1 \bar{U} + d_1}, 0, 0, \frac{Q - m \bar{U}}{\alpha}, \bar{U} \right)$  stabil asimtotik lokal dengan  $\bar{U} = \frac{-\left(\frac{d_1 + \theta \delta}{r_1}\right) + \sqrt{\left(\frac{d_1 + \theta \delta}{r_1}\right)^2 + 4 \frac{\theta \delta Q}{r_1}}}{2}.$

**Teorema 4 :**

Jika  $\underline{A} > 0$ ,  $\begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{C} \\ 1 & \underline{B} \end{vmatrix} > 0$ , dan  $\begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{C} & 0 \\ 1 & \underline{B} & \underline{D} \\ 0 & \underline{A} & \underline{C} \end{vmatrix} > 0$  maka titik ekuilibrium  $\bar{E}_3 \left( \frac{r_2 \underline{U} + d}{\beta}, \bar{x}_2, 0, \frac{Q - m \bar{U}}{\alpha}, \underline{U} \right)$  stabil asimtotik lokal.

**Teorema 5 :**

Jika  $\beta < \hat{\beta}$ ,  $\alpha_1 < \hat{\alpha}_1$ ,  $\alpha_2 < \hat{\alpha}_2$ ,  $\delta < \hat{\delta}$ ,  $r_1 < \hat{r}_1$ ,  $r_2 < \hat{r}_2$ ,  $Q < \hat{Q}$  dan  $\hat{m} < m$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{E}_4 \left( \frac{d_3 - \alpha_2 \hat{x}_2}{\alpha_1}, \hat{x}_2, \frac{\beta \hat{x}_1}{\alpha_2} - \frac{r_2 \bar{U}}{\alpha_2} - \frac{d}{\alpha_2}, \frac{\bar{Q}}{\alpha + \delta(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)}, \bar{U} \right)$  stabil asimtotik global dengan

$$\hat{r}_1 = \frac{1}{3 \hat{x}_1} (m(\beta x_{2a} + \alpha_1 y_a + r_1 U_a + d_1))^{1/2} + \delta \hat{C},$$

$$\hat{Q} = \left( \frac{\alpha}{\delta} + (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right) \left( \frac{1}{3} (d + \alpha_2 y_a + r_2 U_a - \beta x_{1b}) (\alpha + \delta(x_{1a} + x_{2a})) \right)^{1/2},$$

$$\hat{r}_2 = \frac{1}{\hat{x}_2} \left( \left( \frac{m}{3} (d + \alpha_2 y_a + r_2 U_a - \beta x_{1b}) \right)^{1/2} + \delta \hat{C} \right),$$

$$\hat{m} = \frac{3 \delta^2 (x_{1b} + x_{2b})^2}{(\alpha + \delta(x_{1a} + x_{2a}))}, \text{ dan } \hat{\beta}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\delta} \text{ diberikan pada pembuktian.}$$

Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara citasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.

Berdasarkan **Teorema 5**, jika:

1. Laju rekrutmen populasi *phytoplankton* kurang dari  $\hat{\beta}$ , laju pemangsaan *zooplankton* pada populasi yang rentan kurang dari  $\hat{\alpha}_1$ , laju pemangsaan *zooplankton* pada populasi yang rentan kurang dari  $\hat{\alpha}_2$ , laju penurunan konsentrasi racun pada lingkungan yang diserap oleh populasi *phytoplankton* kurang dari  $\hat{\delta}$ , laju penurunan jumlah populasi *phytoplankton* yang rentan akibat racun kurang dari  $\hat{r}_1$ , laju penurunan jumlah populasi *phytoplankton* yang rentan akibat racun kurang dari  $\hat{r}_2$ , laju kenaikan atau pemasukan konsentrasi racun pada lingkungan kurang dari  $\hat{Q}$  dan laju hilangnya racun secara alami lebih besar dari  $\hat{m}$ ,
2. Pada awal waktu, berapapun jumlah populasi *phytoplankton* rentan, jumlah populasi *phytoplankton* terinfeksi, jumlah populasi *zooplankton*, jumlah konsentrasi racun pada lingkungan, dan jumlah konsentrasi racun pada populasi maka untuk waktu yang cukup lama, jumlah populasi *phytoplankton* rentan mendekati  $\frac{d_3 - \alpha_2 \hat{x}_2}{\alpha_1}$ , jumlah populasi *phytoplankton* terinfeksi mendekati  $\hat{x}_2$ , jumlah populasi *zooplankton* mendekati  $\frac{\beta \hat{x}_1}{\alpha_2} - \frac{r_2 \bar{U}}{\alpha_2} - \frac{d}{\alpha_2}$ , jumlah konsentrasi racun pada lingkungan mendekati  $\frac{\hat{Q}}{\alpha + \delta(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)}$ .

## KESIMPULAN

Diberikan model mangsa pemangsa *phytoplankton* dan *zooplankton* dengan *phytoplankton* terinfeksi di lingkungan yang beracun pada ekosistem lautan sebagai berikut. Jika semua parameter memenuhi kondisi tertentu untuk menjamin eksistensi dari  $\bar{E}_1 \left( \frac{d_3}{\alpha_1}, 0, \frac{\theta}{d_3} - \frac{r_1 \delta Q d_3}{\alpha_1 m (\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} - \frac{d_1}{\alpha_1}, \frac{Q \alpha_1}{\alpha \alpha_1 - \delta d_3}, \frac{\delta Q d_3}{m (\alpha \alpha_1 - \delta d_3)} \right)$ ,  $\bar{E}_2 \left( \frac{\theta}{r_1 \bar{U} + d_1}, 0, 0, \frac{Q - m \bar{U}}{\alpha}, \bar{U} \right)$ ,  $\bar{E}_3 \left( \frac{r_2 \bar{U} + d}{\beta}, \bar{x}_2, 0, \frac{Q - m \bar{U}}{\alpha}, \bar{U} \right)$  dan semua parameter memenuhi semua kondisi tertentu sehubungan dengan kriteria *Routh Hurwitz*, maka titik ekuilibrium tersebut stabil asimtotik lokal.

Kemudian jika  $d_3 > \alpha_2 x_2$ ,  $\beta x_1 - r_2 U - d > 0$ ,  $U > 0$ ,  $\beta < \hat{\beta}$ ,  $\alpha_1 < \hat{\alpha}_1$ ,  $\alpha_2 < \hat{\alpha}_2$ ,  $\delta < \hat{\delta}$ ,  $r_1 < \hat{r}_1$ ,  $r_2 < \hat{r}_2$ ,  $Q < \hat{Q}$  dan  $\hat{m} < m$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{E}_4 \left( \frac{d_3 - \alpha_2 \hat{x}_2}{\alpha_1}, \hat{x}_2, \frac{\beta \hat{x}_1}{\alpha_2} - \frac{r_2 \bar{U}}{\alpha_2} - \frac{d}{\alpha_2}, \frac{\hat{Q}}{\alpha + \delta(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)}, \bar{U} \right)$  stabil asimtotik global.

## REKOMENDASI

Pada masing-masing sistem (1) dan (2), penulis hanya menyelidiki kestabilan global dari satu titik ekuilibrium. Untuk titik ekuilibrium yang lain, kestabilan hanya diselidiki di sekitar ekuilibrium atau kestabilan lokal. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menyelidiki kestabilan global dari titik ekuilibrium tersebut.

## TERIMA KASIH

Artikel dari penelitian ini terselenggara atas dukungan dari dana hibah internal Lembaga Penelitian (Lemlit) Universitas Swadaya Gunung Jati (UGJ) untuk anggaran tahun 2018-2019. Kami berterimakasih sedalam-dalamnya atas dukungan selama ini dan juga dukungan pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

## DAFTAR PUSTAKA

Dubey, B. dan Hussain, J., (1998). Modelling the Intercation Of Two Biological Species in a Polluted Environment. *Journal Of Mathematical Analysis and Application*. Vol. 246 No 1: 58-79.

Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara sitasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.



- Luenberger, D.C. (1979). *Intruduction to Dynamic Systems*. John Willey and Sons, Inc United States.
- Mena-Lorca, J. dan Hethcote, W. (1991). Dynamic Models of Infectious Diseases as Regulators of Population Sizes. *J-math Biol.* Vol. 30 No 7: 693-716.
- Sulaiman, H. (2017). Analisis Stabilitas Sistem Dinamik Untuk Model Pertumbuhan Dua Mikroorganisme di Medium Kemostat. *Jurnal Euclid*. Vol 3 No.1: 447.
- Sumarni. (2011). *Analisis Kestabilan Model Kompetisi dua Fitoplankton Dalam Suatu Rantai Makanan Pada Ekosisistem Laut*. Tesis. UNHAS Makassar: Tidak dipublikasikan.
- Purisha, Z. (2011). *Model Mangsa Pemangsa dengan Mangsa Terinfeksi di Lingkungan Beracun*. Tesis. UGM Yogyakarta: Tidak dipublikasikan.

---

Dikirim: 5 Februari 2019; Direvisi: 22 Maret 2019; Diterima: 26 Maret 2019

Cara sitasi: Muhtarulloh, F., Nasir, F., dan Sulaiman, H. 2019. Model Mangsa Pemangsa antara *Phytoplankton* dan *Zooplankton* dimana *Phytoplankton* Berada di Lingkungan yang Beracun pada Ekosistem Lautan. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 31-40, Maret 2019.